



ce
pre
UNI

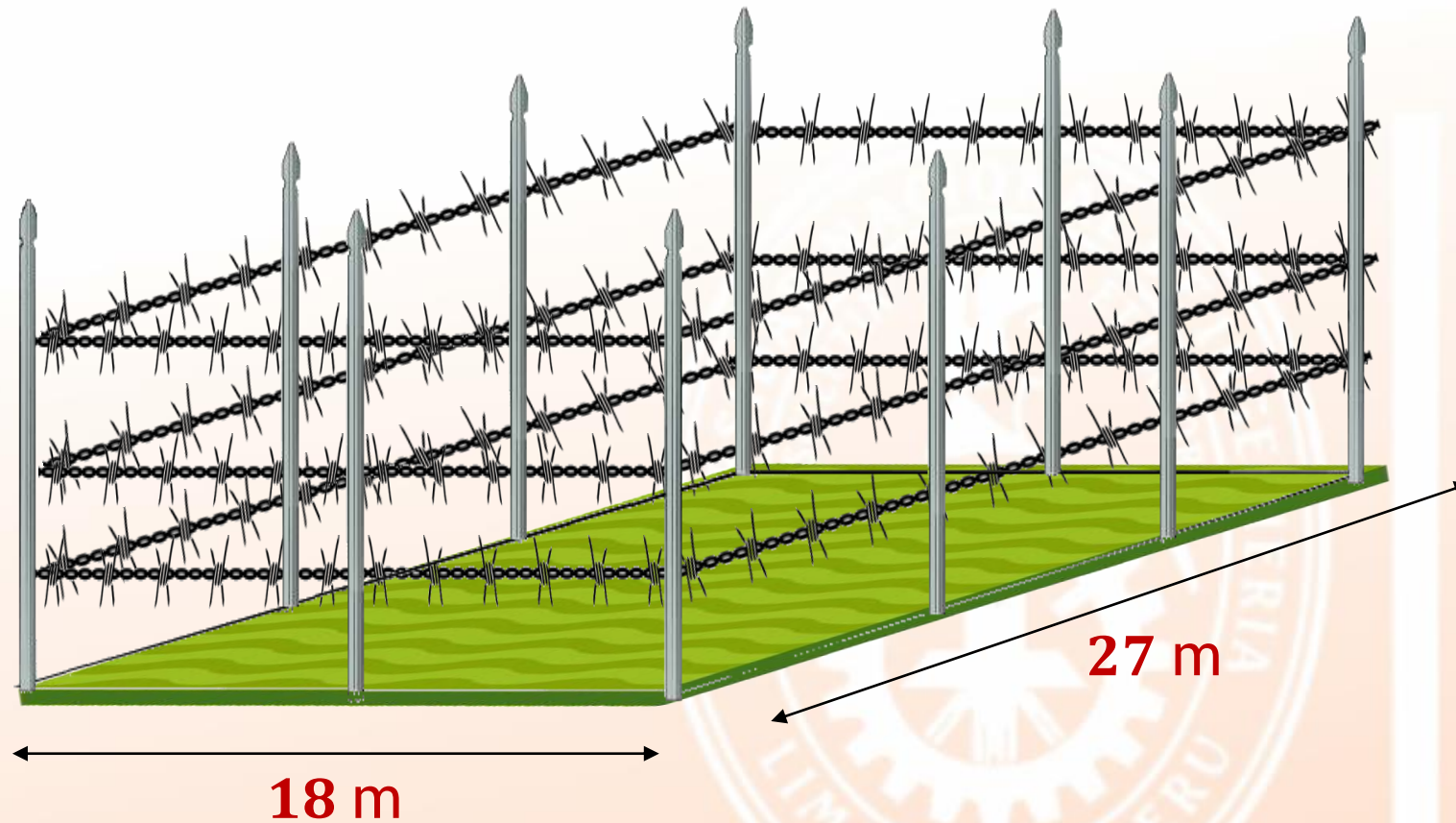
**CICLO
PREUNIVERSITARIO
2023-2**

Aritmética

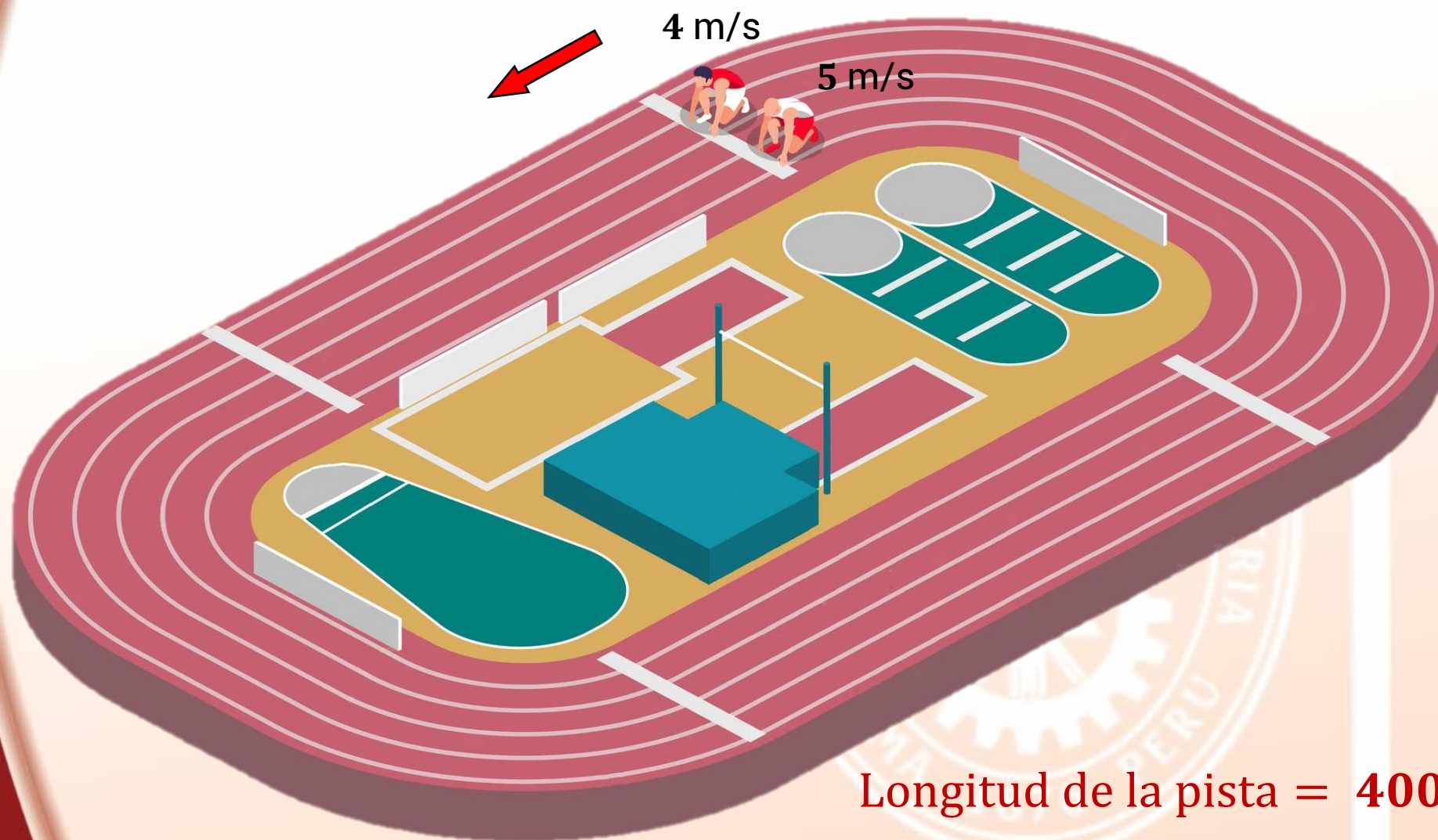
**MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y
MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO**



¿Cuántas estacas equidistantes (en metros) se requiere como mínimo para empezar a cercar un terreno en todo su perímetro?



Luego de la partida, ¿cuánto tiempo tengo que esperar para tomar una fotografía a los atletas pasando juntos por la línea de partida?



Longitud de la pista = 400 m

Máximo Común Divisor (MCD) en los enteros

Conjunto de los divisores comunes positivos

Si $d \mid A$ entonces $d \leq |A|$ y si $d \mid B$, entonces $d \leq |B|$, por lo tanto los divisores comunes forman un conjunto finito, teniendo un elemento mínimo: la unidad y un elemento máximo, al cual llamaremos **máximo común divisor**.

Definición

El máximo elemento del conjunto de los divisores comunes positivos de dos o más números enteros no nulos, recibe el nombre de **máximo común divisor**.

Ejemplo:

El conjunto de los divisores comunes positivos de 18, -27 y 63 es $\{1; 3; 9\}$. Luego: **MCD (18; -27 ; 63) = 9**

Aplicación 1

Determine la suma de los divisores comunes positivos que tienen los números 54 y 72?

A) 20

B) 24

C) 32

D) 39

E) 48

Resolución

Los divisores de 54 son:

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6,$
 $\pm 9, \pm 18, \pm 27, \pm 54$

Los divisores de 72 son:

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 9,$
 $\pm 12, \pm 18, \pm 24, \pm 36$ y ± 72

Los divisores comunes positivos
son: **1; 2; 3; 6; 9 y 18**



Suma: 39

Nota:

Todo divisor común de un grupo de números, divide también a su MCD.

Mínimo Común Múltiplo (MCM) en los enteros

Múltiplos comunes

Sean A y B dos números enteros no nulos. Si $A \mid M$ y $B \mid M$, decimos que M es un múltiplo común de A y B .

Ejemplo:

Los múltiplos comunes de 24 y -36 son $\pm 72, \pm 144, \pm 216, \pm 288, \dots$

El conjunto de los múltiplos comunes positivos de 24 y -36 es:

$$\{72; 144; 216; 288; \dots\}$$

No es posible ubicar un elemento máximo, pero sí un mínimo elemento en este conjunto.

Conjunto de los múltiplos comunes positivos

Este conjunto está dado por $\{M \in \mathbb{Z}^+ / A \mid M \text{ y } B \mid M\}$, el cual es un conjunto no vacío ya que $A.B$ es un múltiplo de A y de B .

Por otro lado se deduce que este conjunto posee un elemento mínimo al cual llamaremos mínimo común múltiplo, pero no posee un elemento máximo.

Definición.

El menor elemento del conjunto de los múltiplos comunes positivos de dos o más números enteros no nulos se denomina **mínimo común múltiplo**.

Ejemplo: El conjunto de los múltiplos comunes positivos de -32 y 40 es $\{160 ; 320 ; 480 ; 640 ; \dots\}$

Luego, **$\text{MCM}(-32; 40) = 160$**

Aplicación 2

Determine la suma de los múltiplos comunes positivos de tres cifras, menores que 600, que tienen los números: 18 y 30.

A) 1 260

B) 1 440

C) 1 540

D) 1 620

E) 1 800

Resolución

Múltiplos positivos de 18: 18; 36; 54; 72; 90; 108; 126; 144; 162; 180; ...

Múltiplos positivos de 30: 30; 60; 90; 120; 150; 180; ...

Múltiplos comunes: 90; 180; 270; ...

$$\Rightarrow 100 < 90k < 600 \Rightarrow 1,1 \dots < k < 6,6 \dots$$

$$\Rightarrow \text{Suma de múltiplos comunes: } 90(2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 1\,800$$

Nota:

Todo múltiplo común de un grupo de números, es también múltiplo de su MCM.

MÉTODOS PARA CALCULAR EL MCD Y EL MCM

Por descomposición canónica individual

Se descompone cada número como producto de sus factores primos (se descompone en forma canónica)

- ❑ El MCD será el producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente.
- ❑ El MCM será el producto de los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

Ejemplo:

Calcule el MCD y MCM de 540; 612 y 720

$$\left. \begin{array}{l} 540 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \\ 612 = 2^2 \times 3^2 \times 17 \\ 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \end{array} \right\}$$

$$\text{MCD} = 2^2 \times 3^2 = 36$$

$$\text{MCM} = 2^4 \times 3^3 \times 5 \times 17 = 36\,720$$

Se descomponen
los números en
forma canónica

Aplicación 3

Si $A = 75 \times 20^n$ y $B = 45 \times 60^n$ tienen 40 divisores positivos comunes. Calcule la cantidad de divisores del **MCM** ($A; B$).

A) 75

B) 125

C) 150

D) 250

E) 280

Resolución

Cada uno de los números se descompone en forma canónica

$$A = 3 \cdot 5^2 \cdot (2^2 \cdot 5)^n$$

$$A = 2^{2n} \cdot 3 \cdot 5^{n+2}$$

$$B = 3^2 \cdot 5 \cdot (2^2 \cdot 3 \cdot 5)^n$$

$$B = 2^{2n} \cdot 3^{n+2} \cdot 5^{n+1}$$

$$\Rightarrow \text{MCD} = 2^{2n} \cdot 3 \cdot 5^{n+1}$$

Cantidad de divisores positivos del MCD

$$(2n + 1)(2)(n + 2) = 40$$

$$\Rightarrow (2n + 1)(n + 2) = 5 \cdot 4 \Rightarrow n = 2$$

Luego: $\text{MCM} = 2^{2n} \cdot 3^{n+2} \cdot 5^{n+2}$

$$\Rightarrow \text{MCM} = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{Cantidad de divisores} \\ \text{del MCM} \end{array} \right) = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

POR DESCOMPOSICIÓN SIMULTÁNEA EN FACTORES PRIMOS

Para calcular el **MCD** de varios números se descomponen simultáneamente en factores primos comunes, el MCD se obtiene multiplicando dichos factores comunes.

Para calcular el **MCM** de varios números se descomponen simultáneamente en factores primos comunes y no comunes, el MCM se obtiene multiplicando todos los factores obtenidos en la descomposición.

240	600	800	2
120	300	400	2
60	150	200	2
30	75	100	5
6	15	20	2
3	15	10	2
3	15	5	3
1	5	5	5
1	1	1	

$$\text{MCD} = 40$$

$$\text{MCM} = 2\,400$$

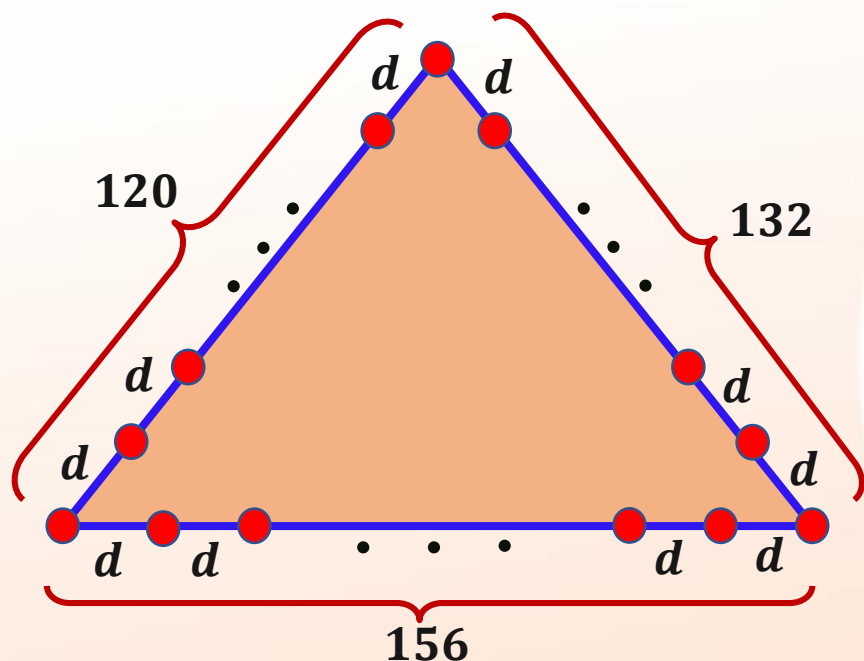
$$\text{MCD} = 2^3 \cdot 5 = 40$$

$$\text{MCM} = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 = 2\,400$$

Aplicación 4

Se han colocado postes igualmente espaciados en el contorno de un campo triangular, cuyos lados miden **120**; **132** y **156** m, respectivamente. Además hay un poste en cada vértice y la distancia entre poste y poste, es entera y la mayor posible, ¿cuántos postes se colocaron?

Resolución



Sea d la distancia entre poste y poste, como debe haber uno de estos en cada vértice de los lados del terreno, entonces, d debe ser un divisor común de **120**, **132** y **156**; además d es el mayor posible.

$$d = \text{MCD}(120; 132; 156) \Rightarrow \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 3 \\ 10 & 10 \end{array}$$

$$\Rightarrow d = 12$$

Luego:

$$\# \text{postes} = \frac{\text{perímetro}}{d} = \frac{120 + 132 + 156}{12} = 34$$

Respuesta: 34

APLICACIÓN 5

Una persona trata de formar un cubo de ladrillos cuyas dimensiones (del ladrillo) son 20 cm, 15 cm, 8 cm. Entonces, el número de ladrillos que necesita para formar el cubo más pequeño (de manera que las aristas de igual longitud sean paralelas) son: (EX UNI)

A) 129

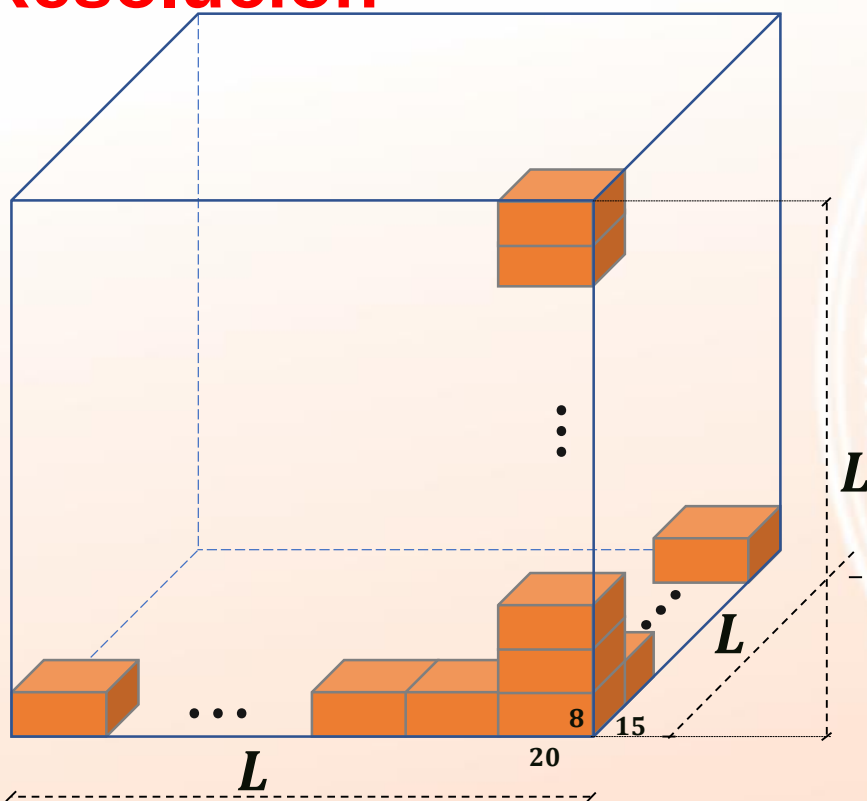
B) 143

C) 680

D) 720

E) 2 400

Resolución



Se observa que la arista del cubo L , debe contener a cada longitud de las dimensiones del ladrillo, y es la menor posible, entonces, L es mínimo y es múltiplo común de 20; 15 y 8.

$$\rightarrow L = \text{MCM}(20; 15; 8)$$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 2 \\ 5 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \quad \times$$

$$\rightarrow L = 120$$

$$\# \text{ ladrillos} = \frac{120}{20} \times \frac{120}{15} \times \frac{120}{8} = 720$$

PROPIEDADES DEL MCD Y MCM

Propiedad 1

Si A y B son dos números enteros no nulos tales que $B \mid A$, entonces $\text{MCD}(A; B) = |B|$ y $\text{MCM}(A; B) = |A|$.

Ejemplo: $\text{MCD}(-63; -21) = |-21| = 21$ y
 $\text{MCM}(-63; -21) = |-63| = 63$

Propiedad 2

Si se tienen dos o más números primos entre sí, entonces el MCD de ellos es la unidad.

Si se tienen dos o más números primos entre si, **dos a dos**, el MCM será el producto de los valores absolutos de ellos.

Ejemplo:

$$\text{MCD}(-15; 28) = 1$$

$$\text{MCD}(44; -75) = 1$$

Ejemplo:

$$\text{MCM}(-12; 25; 7) = |-12| \cdot |25| \cdot |7| = 2\ 100$$

$$\text{MCM}(13; -18; -5) = |13| \cdot |-18| \cdot |-5| = 1\ 170$$

Aplicación 6

Si $\text{MCD}(\overline{ab5}; \overline{ab9}) = b$. Calcule la suma de cifras del $\text{MCM}(-\overline{(a+4)(b+4)}; \overline{(a-4)(a+4)})$.

A) 11

B) 12

C) 13

D) 14

E) 15

Resolución

Como b es MCD de $\overline{ab5}$ y $\overline{ab9}$, entonces $\overline{ab5} = \overset{\circ}{b}$ y $\overline{ab9} = \overset{\circ}{b}$.

$$\Rightarrow \overline{ab9} - \overline{ab5} = \overset{\circ}{b} \Rightarrow 4 = \overset{\circ}{b} \Rightarrow b = 1; 2; 4$$

Como los números son impares, entonces $b = 1$.

Además del número $\overline{(a-4)(a+4)}$, se obtiene $a = 5$.

Reemplazando:

$$\text{MCM}(-\overline{(a+4)(b+4)}; \overline{(a-4)(a+4)}) = \text{MCM}(-95; 19) = |-95| = 95$$

$\Rightarrow$ Suma de cifras: 14

Propiedad 3

Si dos o más números enteros no nulos se multiplican o dividen por otro entero no nulo, entonces tanto el **MCD** como el **MCM** de ellos queda multiplicado o dividido por el valor absoluto de dicho número.

Ejemplo:

Sabemos que: $\text{MCD}(108, 72) = 36 \rightarrow \text{MCD}\left(\frac{108}{9}, \frac{72}{9}\right) = \frac{36}{9} \rightarrow \text{MCD}(12, 8) = 4.$

Mientras que: $\text{MCM}(108, 72) = 216 \rightarrow \text{MCM}\left(\frac{108}{12}, \frac{72}{12}\right) = \frac{216}{12} \rightarrow \text{MCM}(9, 6) = 18.$

En general:

$$\text{MCD}(A k, B k, C k) = \text{MCD}(A, B, C) \times |k|$$

$$\text{MCD}\left(\frac{A}{k}, \frac{B}{k}, \frac{C}{k}\right) = \frac{\text{MCD}(A, B, C)}{|k|}, \quad k \text{ es divisor del MCD}$$

$$\text{MCM}(A k, B k, C k) = \text{MCM}(A, B, C) \times |k|$$

$$\text{MCM}\left(\frac{A}{k}, \frac{B}{k}, \frac{C}{k}\right) = \frac{\text{MCM}(A, B, C)}{|k|}, \quad k \text{ es divisor del MCD}$$

Aplicación 7

El MCM de los números: $54k$; $72k$ y $108k$ es 3 240. Determine el menor de los números.

A) 756

B) 810

C) 972

D) 1 080

E) 1 134

Resolución

DATO: $\text{MCM}(54k; 72k; 108k) = 3\,240$

Por propiedad: $18k \times \underbrace{\text{MCM}(3; 4; 6)}_{12} = 3\,240 \rightarrow k = 15$

$\rightarrow$ El menor de los números es: $54k = 54 \cdot (15) = 810$

Propiedad 4

Si un conjunto de números se dividen entre su **MCD**, los cocientes que se obtienen son primos entre sí.

$$\text{Sea: } \text{MCD}(A, B, C) = d \left\{ \begin{array}{l} \frac{A}{d} = p \\ \frac{B}{d} = q \\ \frac{C}{d} = r \end{array} \right. \rightarrow \text{PESI}$$

$$\text{Entonces: } A = d \cdot p ; B = d \cdot q \text{ y } C = d \cdot r$$

donde p, q y r son **primos entre sí (PESI)**.

Propiedad 5

Si el **MCM** de un conjunto de números se divide entre cada uno de ellos, entonces los cocientes que se obtienen son primos entre sí.

$$\text{Sea: } \text{MCM}(A, B, C) = m \left\{ \begin{array}{l} \frac{m}{A} = p \\ \frac{m}{B} = q \\ \frac{m}{C} = r \end{array} \right. \rightarrow \text{PESI}$$

$$\text{Entonces: } A = \frac{m}{p}; \quad B = \frac{m}{q} \quad \text{y} \quad C = \frac{m}{r}$$

donde p, q y r son **primos entre sí (PESI)**.

Aplicación 8

Si N es un número entero positivo de tres cifras y $\text{MCD}(N; 420) = 84$, calcule la cantidad de valores de N .

A) 5

B) 6

C) 7

D) 8

E) 9

Resolución

Como: $\text{MCD}(N; 420) = 84$ $\left\{ \begin{array}{l} N = \overset{\circ}{84} \\ 420 = \overset{\circ}{84} \cdot 5 \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} N = 84p \\ 420 = 84 \cdot 5 \end{array}$

p y 5 son
PESI

Luego $p \neq 5$ y $100 \leq N < 1\,000 \rightarrow 100 \leq 84p < 1\,000$

$\rightarrow 1,1 \dots \leq p < 11,9 \dots$

Valores de p : 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 11

$\therefore N$ toma 8 valores.

Propiedad 6

$$\text{MCD}(N^a - 1, N^b - 1, \dots, N^p - 1) = N^{\text{MCD}(a; b; \dots; p)} - 1$$

Ejemplo: $\text{MCD}(N^{10} - 1, N^{15} - 1, N^{35} - 1) = N^{\text{MCD}(10; 15; 35)} - 1 = N^5 - 1$

Aplicación 9

Dados $A = 77 \dots 7_{(8)}$ (54 cifras) y $B = (15)(15) \dots (15)_{(16)}$ (108 cifras), determine la suma de cifras del $\text{MCD}(A; B)$, cuando esté expresado en base 4.

A) 64

B) 72

C) 81

D) 90

E) 105

Resolución

$$A = 8^{54} - 1 \Rightarrow A = 2^{162} - 1$$

$$B = 16^{108} - 1 \Rightarrow B = 2^{432} - 1$$

$$\text{MCD}(A; B) = 2^{\text{MCD}(162; 432)} - 1$$

$$\Rightarrow \text{MCD}(A; B) = 2^{54} - 1 = 4^{27} - 1$$

$$\Rightarrow \text{MCD}(A; B) = \underbrace{333 \dots 33}_{27 \text{ cifras}}_{(4)}$$

La suma de cifras del MCD es 81.

Propiedad 7

El producto de los valores absolutos de dos números enteros no nulos, es igual al producto del mínimo común múltiplo por su máximo común divisor.

$$|A| \times |B| = \text{MCD}(A, B) \times \text{MCM}(A, B)$$

Generalización

Para n números enteros no nulos $A_1, A_2, \dots, A_n$ tenemos:

$$|A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n| = \text{MCM}(A_1, A_2, \dots, A_n) \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_{n-1}$$

Donde:

$$d_1 = \text{MCD}(A_1, A_2),$$

$$d_2 = \text{MCD}(A_1 \cdot A_2 / d_1, A_3),$$

$$d_3 = \text{MCD}(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 / (d_1 d_2), A_4), \dots,$$

$$d_{n-1} = \text{MCD}(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1} / (d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_{n-2}), A_n).$$

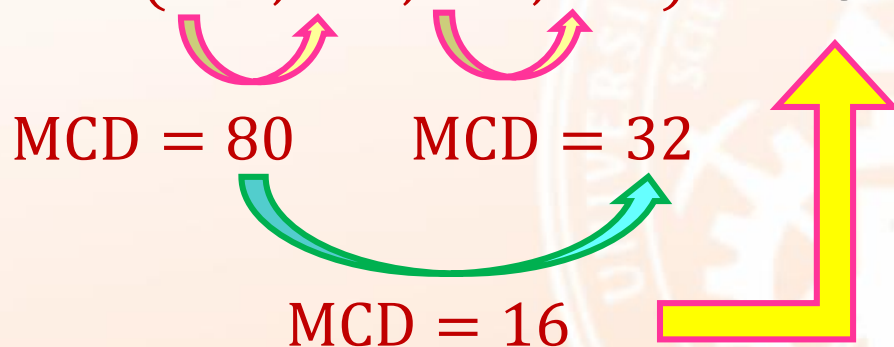
Propiedad 8

Si en un conjunto de números, parte de ellos se reemplaza por el **MCD**, entonces el **MCD** no varía, algo similar se cumple para el **MCM**.

$$\text{MCD}(A, B, C, D) = \text{MCD}[\text{MCD}(A, B), \text{MCD}(A, B, C), D]$$

$$\text{MCM}(A, B, C, D) = \text{MCM}[\text{MCM}(A, B, C), \text{MCM}(C, D)]$$

Ejemplo: $\text{MCD}(160, 240, 288, 320) = 16$



Aplicación 10

Si $\text{MCD}(3a; 24b) = 18k$ y el $\text{MCD}(2b; c) = 2k$; además el $\text{MCD}(a; 8b; 4c) = 1\,200$. Calcule k .

A) 500

B) 540

C) 580

D) 600

E) 640

Resolución

Se tiene: $\text{MCD}(3a; 24b) = 18k \Rightarrow \text{MCD}(a; 8b) = 6k$
 $\div 3$

Además: $\text{MCD}(2b; c) = 2k \Rightarrow \text{MCD}(8b; 4c) = 8k$
 $\times 4$

Luego:

$$\text{MCD}(a; 8b; 4c) = \text{MCD}[\underbrace{\text{MCD}(a; 8b)}_{6k}, \underbrace{\text{MCD}(8b; 4c)}_{8k}] = 2k \cdot \underbrace{\text{MCD}[3, 4]}_1$$

$$\downarrow$$

$$1\,200 = 2k \Rightarrow k = 600$$

Propiedad 9

En la división euclidiana $D = d \cdot q + r$, entonces $\text{MCD}(D, d) = \text{MCD}(d, r)$

Ejemplo:

Tenemos: $\text{MCD}(2\ 086, 745) = \text{MCD}(745, 596) = \text{MCD}(596, 149) = 149$

$$\begin{array}{r} 2\ 086 \\ 596 \end{array} \begin{array}{l} \overline{) 745} \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 745 \\ 149 \end{array} \begin{array}{l} \overline{) 596} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 596 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} \overline{) 149} \\ 4 \end{array}$$

Propiedad de la linealidad del MCD

Sean A y B dos números enteros no nulos y sea $d = \text{MCD}(A, B)$, entonces existen dos números enteros no nulos m y n tales que

$$d = mA + nB$$

Propiedad 10: ALGORITMO DE EUCLIDES

Sean A y B números enteros diferentes de cero. Para calcular el $\text{MCD}(A, B)$ podemos utilizar la propiedad 9 varias veces, de la siguiente forma, sea $d = \text{MCD}(A, B)$

División

$$A = B \cdot q + r ,$$

$$B = r \cdot q_1 + r_1 ,$$

$$r = r_1 \cdot q_2 + r_2 ,$$

$$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3 ,$$

$$r_2 = r_3 \cdot q_4 + r_4 ,$$

$$\vdots$$

$$r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1}$$

$$d = \text{MCD}(B, r)$$

$$d = \text{MCD}(r, r_1) , \quad r_1 < r$$

$$d = \text{MCD}(r_1, r_2) , \quad r_2 < r_1$$

$$d = \text{MCD}(r_2, r_3) , \quad r_3 < r_2$$

$$d = \text{MCD}(r_3, r_4) , \quad r_4 < r_3$$

$$\vdots$$

$$d = \text{MCD}(r_{n-1}, r_n) = r_n$$

ALGORITMO DE EUCLIDES

Para el cálculo del MCD de A y B , se divide el número mayor entre el menor, luego B entre el resto encontrado y así sucesivamente entre los restos que se van obteniendo hasta que resulta una división exacta. El último residuo es el MCD de A y B .

Cocientes	q	q_1	q_2	...	...	q_n	q_{n+1}
A	B	r	r_1	...	r_{n-2}	r_{n-1}	r_n
Restos	r	r_1	r_2	...	r_{n-1}	r_n	—

← MCD

$$\text{MCD}(A, B) = r_n$$

Nota: Si $r_n = 1$, los números son **PESI**

EJEMPLO DEL ALGORITMO DE EUCLIDES

Calcular el $\text{MCD}(424, -272)$

	-1	-2	4	1	3
424	-272	152	32	24	8
	152	32	24	8	

Entonces el $\text{MCD}(424, -272) = 8$

Aplicación 11

Al calcular el MCD de $\overline{a(a+5)a}$ y $\overline{(a+4)bc}$ por el algoritmo de Euclides se obtuvieron como cocientes sucesivos 1, 1, 3 y 3. Calcule el valor de $a + b + c$.

A) 10

B) 12

C) 13

D) 14

E) 15

Resolución

Sea: $k = \text{MCD}(\overline{(a+4)bc}; \overline{a(a+5)a})$

Se tiene:

	1	1	3	3
$\overline{(a+4)bc} = 23k$	$\overline{a(a+5)a} = 13k$	$10k$	$3k$	k
	$10k$	$3k$	k	

Como: $\overline{\overset{-4}{a}\overset{-3}{a+5}\overset{1}{a}} = 13k = \overset{\circ}{13}$

$$\Rightarrow -6a - 15 = \overset{\circ}{13} \Rightarrow a = 4$$

Reemplazando:

$$494 = 13k \Rightarrow k = 38$$

$$\overline{8bc} = 23 \times 38 = 874$$

$$\Rightarrow b = 7 ; c = 4$$

$$\therefore a + b + c = 15$$

FRACCIÓN CONTINUA SIMPLE FINITA

Definición

Es una expresión de la forma:

Donde: a_0 es entero y los números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ son enteros positivos y n es finito; es una fracción continua simple finita

$$F = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}}$$

La expresión anterior se puede representar como:

$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ y también por: $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}}$

Ejemplo:

Expresar la fracción $F = 42/19$, mediante fracciones continuas.

$$\frac{42}{19} = 2 + \frac{4}{19} = 2 + \frac{1}{\frac{19}{4}} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{3}{4}} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{4}{3}}} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$$

$$\frac{42}{19} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$$

Entonces: $\frac{42}{19} = [2; 4, 1, 3]$

Aplicación 12

Sea la fracción continua f

$$f = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}$$

Dé como respuesta la suma de los términos de su fracción irreducible equivalente.

A) 53
D) 81

B) 67
E) 85

C) 71

Resolución:

$$f = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{4}{5}}}$$

$$f = 2 + \frac{1}{1 + \frac{5}{14}} = 2 + \frac{14}{19}$$

$$f = \frac{52}{19}$$

Suma de términos: $52 + 19 = 71$

Representación de un número racional A/B mediante fracción continua simple

Se realiza el algoritmo de Euclides (división por defecto) para el cálculo del $\text{MCD}(A, B)$.

	x	y	z	$\dots$	v	w
A	B	—	—	$\dots$	—	d
	—	—	—	$\dots$	d	

Entonces:

$$\frac{A}{B} = x + \frac{1}{y + \frac{1}{z + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{v + \frac{1}{w}}}}}$$

Ejemplo:

Expresa mediante fracciones continuas $\frac{216}{76}$

Entonces:

q	2	1	5	3
r	76	64	12	4
	64	12	4	0

$$\frac{216}{76} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{3}}} = [2; 1, 5, 3]$$

Aplicación 13

Si: $\frac{a}{b} = [0 ; 2, 1, 6]$ y $\frac{c}{d} = [-4 ; 5, 4]$, además a y b son PESI; c y d son PESI. Calcule la cantidad de divisores enteros de $a \cdot (b - c) \cdot d$.

A) 27

B) 36

C) 54

D) 72

E) 108

Resolución

Los términos de cada fracción continua que genera $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son los cocientes sucesivos al obtener el MCD por el algoritmo de Euclides.

Como los términos de cada fracción son PESI, entonces su MCD es 1.

➡

	0	2	1	6
$a = 7$	$b = 20$	7	6	1
	7	6	1	

	-4	5	4
$c = -80$	$d = 21$	4	1
	4	1	

Luego:

$$a \cdot (b - c) \cdot d = 7 \cdot (20 - (-80)) \cdot 21$$

$$= 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 7^2$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{Cantidad de} \\ \text{divisores enteros} \end{array} \right) = 2 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3)$$

$$= 108$$

TEOREMA

Todo número racional puede ser representado mediante una fracción continua simple finita y tal representación es básicamente única. Además toda fracción continua simple finita representa a un número racional.

Definición:

Se denomina convergente o aproximante de orden i de C , a la expresión:

$$C_i = [a_0, a_1, \dots, a_i], \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

C_i es un racional $C_i = p_i / q_i$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

p_i es el i -ésimo numerador y q_i es el i -ésimo denominador

Pueden obtenerse en forma recurrente.

Fórmulas de recurrencia

$$p_i = a_i \cdot p_{i-1} + p_{i-2}$$

$$q_i = a_i \cdot q_{i-1} + q_{i-2}$$

$$i = 2, 3, 4, \dots$$

con valores iniciales

$$p_0 = a_0, \quad p_1 = a_0 \cdot a_1 + 1$$

$$q_0 = 1, \quad q_1 = a_1$$

La fracción p_i/q_i es irreducible (se deduce de la relación):

$$p_i \cdot q_{i-1} - p_{i-1} \cdot q_i = (-1)^{i-1}$$

y q_i es siempre positivo, ya que en su expresión no interviene a_0 . De hecho q_i coincide con el numerador de la fracción $[a_1; a_2, a_3, \dots, a_i]$

El nombre de convergentes para los C_i obedece al siguiente resultado:

- i) Los convergentes pares C_{2i} forman una sucesión creciente y los impares C_{2i+1} una sucesión decreciente.
- ii) Cada convergente impar es mayor que cada convergente par y el valor de la fracción continua está entre los convergentes pares y los impares.

Observación:

Para $C = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ es evidente que C_n coincide con el valor de C y es un número racional.

Estos resultados se apreciarán mejor con un ejemplo numérico.

Calculemos los convergentes en el desarrollo de $\frac{40}{31}$.

Convergentes

Ejemplo: $\frac{40}{31}$

$$\frac{40}{31} = 1 + \frac{9}{31} = 1 + \frac{1}{\frac{31}{9}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{4}{9}}$$

$$= 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{9}{4}}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}$$

$$\frac{40}{31} = [1; 3, 2, 4]$$

Observación:

$$C_0 < C_2 < C_4 < \dots < C_5 < C_3 < C_1$$

$$C_0 = 1 = 1$$

$$C_1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} = 1,333 \dots$$

$$C_2 = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{2}} = 1 + \frac{2}{7} = \frac{9}{7} = 1,285 \dots$$

$$C_3 = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{9}{4}}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{4}{9}} = 1 + \frac{1}{\frac{31}{9}} = 1 + \frac{9}{31}$$

$$= \frac{40}{31} = 1,290 \dots$$



ce
pre
UNI

Artes y Oficios

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

ce
pre
UNI

Problema 1

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

$$\text{MCD}(a^2 - 2; a^2 + 3) = 1, \forall a \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{MCM}(n - km; m) = \text{MCM}(n; m), \forall m; n; k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{MCD}(-35; -40) = -5.$$

A) VFF

B) FVV

C) VFV

D) FVF

E) VVF

Resolución

ce
pre
UNI

Problema 4

Si $\text{MCM}[\overline{(a+3)(b-1)(c+1)}; \overline{abc}] = 3\,880$. Calcule $a + b + c$.

A) 16

B) 17

C) 18

D) 19

E) 20

Resolución

Problema 6

Si $\text{MCD}(\overline{m4m}; \overline{7n7}) = 13$, calcule la suma de divisores propios del $\text{MCM}(\overline{m6}; \overline{n4})$.

A) 280

B) 316

C) 360

D) 472

E) 508

Resolución

Problema 7

Si $A = 30 \cdot 40^m$ y $B = 40 \cdot 30^n$ además: $CD_{MCD(A;B)} = 70$, $CD_{MCM(A;B)} = 640$ y $n < m$. Calcule $m + n$.

A) 9

B) 10

C) 12

D) 15

E) 18

Resolución



ce
pre
UNI

Problema 8

Si: $P = \text{MCD}(97!; \overline{abc}!)$ y tiene m divisores, calcule la cantidad de divisores de P que terminan en la cifra 5.

A) $\frac{22m}{2185}$

B) $\frac{23m}{2185}$

C) $\frac{m}{23}$

D) $\frac{22m}{23}$

E) $\frac{23m}{22}$

Resolución

Problema 10

Si $A = 2300 \dots 00_{(12)}$ de $(n + 2)$ cifras y $\text{MCD}(A ; \phi(A)) = 800 \dots 00_{(72)}$ de 8 cifras, calcule n .

A) 8

B) 9

C) 10

D) 11

E) 12

Resolución

ce
pre
UNI

Problema 16

Para llenar el contenido de un reservorio con agua se utiliza un caño de la siguiente manera: primero se llena los $\frac{4}{7}$ del volumen con un caudal de 3 litros por minuto, y para el resto del volumen el caudal se aumenta en un litro por minuto. Si el menor múltiplo común de los tiempos parciales es 480 minutos, calcule el tiempo de llenado en horas de dicho reservorio.

A) $\frac{6}{5}$

B) $\frac{19}{12}$

C) $\frac{25}{18}$

D) $\frac{35}{24}$

E) $\frac{3}{2}$

Resolución

Problema 18

Al calcular el MCD de $1\,428$ y $\overline{c2}$ mediante el algoritmo de Euclides se obtuvieron como cocientes sucesivos b , a , a , 2 y 3 , donde a es el MCD de los números. Calcule: $a + b + c$.

A) 24

B) 25

C) 26

D) 27

E) 28

Resolución

Problema 27

Si: $\text{MCD}(91A; 13B) = 104$, $\text{MCM}(63A; 9B) = 12\,096$ y $A > B$,
entonces el $\text{MCM}(A - B; A + B)$ es

A) 80

B) 192

C) 272

D) 440

E) 560

Resolución

Problema 30

Daniel desea renovar algunos ambientes de la casa que compró; por ejemplo, había un piso de forma cuadrada con losetas de $24\text{ cm} \times 20\text{ cm}$, decide cambiar por losetas de $36\text{ cm} \times 24\text{ cm}$ cuyo costo por loseta es S/ 16, pero resulta que este cambio no le agradó a la esposa de Daniel quien le pide que realice un nuevo cambio con losetas de $40\text{ cm} \times 30\text{ cm}$ cuyo costo es S/ 18. Calcule el mínimo gasto en soles que realizó Daniel en la compra de las losetas en ambos cambios.

A) 3 825

B) 3 950

C) 4 024

D) 4 344

E) 4 454

Resolución